Tables of stability spaces and of epikernels of crystallographic point groups

Vojtěch **Kopský**

Department of Mathematics and Didactics of Mathematics, Pedagogical Faculty,
Technical University of Liberec, Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, Czech Republic, and
Institut of Physics, Czech Acad. Sci., Na Slovance 2, 182 21 Praha 8, Czech Republic.

The title tables together with tables of tensorial covariants serve to find tensor parameters of ferroic phase transitions and to distinguish between primary and secondary parameters. The use of these tables has been described by Kopský (2006) for tetragonal groups. Below we submit analogous tables for all crystallographic point groups. Using the system of representations described in this paper, it is easy to extend these tables also to magnetic crystallographic point groups.

Acknowledgements

This work is part of a project AVOZ 10100520 of the Czech Academy and has been supported by grant No. 202/04/0992 of the Czech Grant Agency. The support of the Technical university of Liberec is also highly appreciated.

Reference:

Kopský, V. (2006). *Acta Cryst.* A **62**, 000-000, xo5008.

Stability Spaces and Epikernels of R-irreducible Representations of Crystal Point Groups

Triclinic system

Geometric class $No.\ G1$: Group $C_1 - 1$

The geometric class $No.\ G1$ contains only one group: $C_1 - 1$ which is trivial.
Stability space is spanned by the invariant variable x_1.

Geometric class $No.\ G2$: Group $C_i - \overline{1}$

The geometric class $No.\ G2$: contains only one group: $C_i - \overline{1}$ which has only the trivial subgroup C_1 with stability space spanned by the variable x_1^-.

Monoclinic system

Geometric classes $No.\ G3$: $C_2 - 2$ and $No.\ G4$: $C_s - m$

The groups of geometric classes $No.\ G3$: $C_2 - 112$ and $No.\ G4$: $C_s - 11m$ have only the trivial subgroup C_1 with stability space spanned by the variable x_3.

Geometric class $No.\ G5$: Group $C_{2hz} - 2_z/m_z$

C_i	$\overline{1}$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
C_{2z}	112_z	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{sz}	$11m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
C_1	1	$\mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_1^-, \mathsf{x}_3^-$

Orthorhombic system

Geometric class $No.\ G6$: Group $D_2 - 2_x 2_y 2_z$
$No.\ G7$: $C_{2vz} - m_x m_y 2_z$

$G6$		$G7$		
C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
C_{2x}	$2_x 11$	C_{sx}	$m_x 11$	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
C_{2y}	$12_y 1$	C_{sy}	$1m_y 1$	$\boxed{\mathsf{x}_4}$
C_1	1	C_1	1	x_2, x_3, x_4

Geometric class $No.\ G8$: Group $D_{2h} - m_x m_y m_z$

C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
C_{2hx}	$112_x/m_x$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
C_{2hy}	$112_y/m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_4^+}$
D_2	$2_x 2_y 2_z$	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_4^-}$
C_i	$\overline{1}$	x_2^+, x_3^+, x_4^+
C_{2z}	112_z	x_2^+, x_1^-, x_2^-
C_{2x}	$2_x 11$	x_3^+, x_1^-, x_3^-
C_{2y}	$12_y 1$	x_4^+, x_1^-, x_4^-
C_{sz}	$11m_z$	x_2^+, x_3^-, x_4^-
C_{sx}	$m_x 11$	x_2^-, x_3^+, x_4^-
C_{sy}	$1m_y 1$	x_2^-, x_3^-, x_4^+
C_1	1	x_2^+, x_3^+, x_4^+, x_1^-, x_2^-, x_3^-, x_4^-

Tetragonal system

Geometric class $No.\ G9$: Group $4_z - C_{4z}$
$No.\ G10$: $\overline{4}_z - S_{4z}$

$G9$		$G10$		
C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
C_1	1	C_1	1	x_3, $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G11$: Group $4_z/m_z$ - C_{4hz}

C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
C_{4z}	4_z	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
S_{4z}	$\overline{4}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
C_{2z}	112_z	x_3^+, x_1^-, x_3^-
C_i	112_z	x_3^+, $\boxed{(x_1^+, y_1^+)}$
C_{sz}	$11m_z$	x_3^+, $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$
C_1	1	x_3^+, x_1^-, x_3^-, (x_1^+, y_1^+), (x_1^-, y_1^-)

Geometric class $No.\ G12$: Group $4_z 2_x 2_{xy} - D_{4z}$
$No.\ G13$: $4_z m_x m_{xy} - C_{4vz}$
$No.\ G14$: (a) $\overline{4}_z 2_x m_{xy} - D_{2dz}$
(b) $\overline{4}_z m_x 2_{xy} - \widehat{D}_{2dz}$

$G12$		$G13$		$G14a$		$G14b$		
C_{4z}	4_z	C_{4z}	4_z	S_{4z}	$\overline{4}_z$	S_{4z}	$\overline{4}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
D_2	$2_x 2_y 2_z$	C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	D_2	$2_x 2_y 2_z$	C_{2vz}	$m_x m_y m 2z$	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
$\widehat{D}_{2z}$	$2_{x\overline{y}} 2_{xy} 2_z$	$\widehat{C}_{2vz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} 2_z$	$\widehat{C}_{2vz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} 2_z$	$\widehat{D}_{2z}$	$2_{x\overline{y}} 2_{xy} 2_z$	$\boxed{\mathsf{x}_4}$
C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	x_2, x_3, x_4
C_{2x}	$2_x 11$	C_{sx}	$m_x 11$	C_{2x}	$2_x 11$	C_{sx}	$m_x 11$	x_3, $\boxed{(x_1, 0)}$
C_{2y}	$12_y 1$	C_{sy}	$1 m_y 1$	C_{2y}	$12_y 1$	C_{sy}	$1 m_y 1$	x_3, $\boxed{(0, x_1)}$
C_{2xy}	$12_{xy} 1$	C_{sxy}	$1 m_{xy} 1$	C_{sxy}	$1 m_{xy} 1$	C_{2xy}	$12_{xy} 11$	x_4, $\boxed{(x_1, x_1)}$
$C_{2x\overline{y}}$	$2_{x\overline{y}} 11$	$C_{sx\overline{y}}$	$m_{x\overline{y}} 11$	$C_{sx\overline{y}}$	$m_{x\overline{y}} 11$	$C_{2x\overline{y}}$	$2_{x\overline{y}} 11$	x_4, $\boxed{(x_1, -x_1)}$
C_1	1	C_1	1	C_1	1	C_1	1	x_2, x_3, x_4, $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G15$: Group $D_{4hz} - 4_z/m_z m_x m_{xy}$

C_{4hz}	$4_z/m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
D_{2h}	$m_x m_y m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
$\widehat{D}_{2hz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_4^+}$
D_{4z}	$4_z 2_x 2_{xy}$	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{4vz}	$4_z m_x m_{xy}$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
D_{2dz}	$\overline{4}_z 2_x m_{xy}$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
$\widehat{D}_{2dz}$	$\overline{4}_z m_x 2_{xy}$	$\boxed{\mathsf{x}_4^-}$
C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_4^+$
C_{4z}	4_z	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_2^-$
D_2	$2_x 2_y 2_z$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_3^-$
$\widehat{D}_{2z}$	$2_{x\overline{y}} 2_{xy} 2_z$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_4^-$
S_{4z}	$\overline{4}_z$	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_3^-,\ \mathsf{x}_4^-$
C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	$\mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_4^-$
$\widehat{C}_{2vz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} 2_z$	$\mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ \mathsf{x}_4^+$
C_{2z}	112_z	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ \mathsf{x}_4^-$
C_{2hx}	$2_x/m_x 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \boxed{(x_1^+, 0)}$
C_{2hy}	$12_y/m_y 1$	$\mathsf{x}_3^+,\ \boxed{(0, x_1^+)}$
C_{2hxy}	$12_{xy}/m_{xy} 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \boxed{(x_1^+, x_1^+)}$
$C_{2hx\overline{y}}$	$2_{x\overline{y}}/m_{x\overline{y}} 11$	$\mathsf{x}_4^+,\ \boxed{(x_1^+, -x_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_4^+,\ \boxed{(x_1^+, y_1^+)}$

C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	x_3^+, $\boxed{(x_1^-, 0)}$
C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	x_3^+, $\boxed{(0, x_1^-)}$
C_{2vxy}	$m_{x\bar{y}} 2_{xy} m_z$	x_4^+, $\boxed{(x_1^-, x_1^-)}$
$C_{2vx\bar{y}}$	$2_{x\bar{y}} m_{xy} m_z$	x_4^+, $\boxed{(x_1^-, -x_1^-)}$
C_{sz}	$11m_z$	x_2^+, x_3^+, x_4^+, $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$
C_{2x}	$2_x 11$	x_3^+, x_1^-, x_3^-, $(x_1^+, 0)$, $(x_1^-, 0)$
C_{2y}	$12_y 1$	x_3^+, x_1^-, x_3^-, $(0, x_1^+)$, $(0, x_1^-)$
C_{2xy}	$12_{xy} 1$	x_4^+, x_1^-, x_4^-, (x_1^+, x_1^+), (x_1^-, x_1^-)
$C_{2x\bar{y}}$	$2_{x\bar{y}} 11$	x_4^+, x_1^-, x_4^-, $(x_1^+, -x_1^+)$, $(x_1^-, -x_1^-)$
C_{sx}	$m_x 11$	x_3^+, x_2^-, x_4^-, $(x_1^+, 0)$, $(0, x_1^-)$
C_{sy}	$1m_y 1$	x_3^+, x_2^-, x_4^-, $(0, x_1^+)$, $(x_1^-, 0)$
C_{sxy}	$1m_{xy} 1$	x_4^+, x_2^-, x_3^-, (x_1^+, x_1^+), $(x_1^-, -x_1^-)$
$C_{sx\bar{y}}$	$m_{x\bar{y}} 11$	x_4^+, x_2^-, x_3^-, $(x_1^+, -x_1^+)$, (x_1^-, x_1^-)
C_1	112_z	x_2^+, x_3^+, x_4^+, x_1^-, x_2^-, x_3^-, x_4^-, (x_1^+, y_1^+), (x_1^-, y_1^-)

Hexagonal family; trigonal system

Geometric class $No.\ G16$: Group C_3 - 3_z

The groups of the geometric class $No.\ G16$: $C_3 - 3$ have only the trivial subgroup C_1 with stability space spanned by the variables (x_1, y_1).

Geometric class $No.\ G17$: Group C_{3i} - $\overline{3}_z$

C_3	3_z	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_i	$\overline{1}$	$\boxed{(x_1^+, y_1^+)}$
C_1	1	x_1^-, (x_1^+, y_1^+), $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$

Geometric class $No.\ G18$: Group (a) D_{3x} - 3_z2_x1
$No.\ G19$: (a) C_{3vx} - 3_zm_x1

$18a$		$19a$		
C_3	3_z	C_3	3_z	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
C_{2x}	2_x11	C_{sx}	m_x11	$\boxed{(x_1, 0)}$
$C_{2x'}$	$2_{x'}11$	$C_{sx'}$	$m_{x'}11$	$\boxed{(-ax_1, bx_1)}$
$C_{2x''}$	$2_{x''}11$	$C_{sx''}$	$m_{x''}11$	$\boxed{(-ax_1, -bx_1)}$
C_1	1	C_1	1	x_2, $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G18$: Group (b) D_{3y} - 3_z12_y
$No.\ G19$: (b) C_{3vy} - 3_z1m_y

$18b$		$19b$		
C_3	3_z	C_3	3_z	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
C_{2y}	12_y1	C_{sy}	m_y11	$\boxed{(0, y_1)}$
$C_{2y'}$	$12_{y'}1$	$C_{sy'}$	$m_{y'}11$	$\boxed{(-by_1, -ay_1)}$
$C_{2y''}$	$12_{y''}1$	$C_{sy''}$	$m_{y''}11$	$\boxed{(by_1, -ay_1)}$
C_1	1	C_1	1	x_2, $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G20$: Group (a) D_{3dx} - $\overline{3}_z m_x 1$

C_{3i}	$\overline{3}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
D_{3x},	$3_z 2_x 1$	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{3vx},	$3_z m_x 1$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
C_3	3_z	x_2^+, x_1^-, x_2^-
C_{2hx}	$2_x/m_x 11$	$\boxed{(x_1^+, 0)}$
$C_{2hx'}$	$2_{x'}/m_{x'} 11$	$\boxed{(-ax_1^+, bx_1^+)}$
$C_{2hx''}$	$2_{x''}/m_{x''} 11$	$\boxed{(-ax_1^+, -bx_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	x_2^+, $\boxed{(x_1^+, y_1^+)}$
C_{2x}	$2_x 11$	x_1^-, $(x_1^+, 0)$, $\boxed{(x_1^-, 0)}$
$C_{2x'}$	$2_{x'} 11$	x_1^-, $(-ax_1^+, bx_1^+)$, $\boxed{(-ax_1^-, bx_1^-)}$
$C_{2x''}$	$2_{x''} 11$	x_1^-, $(-ax_1^+, -bx_1^+)$, $\boxed{(-ax_1^-, -bx_1^-)}$
C_{sx}	$m_x 11$	x_2^-, $(x_1^+, 0)$, $\boxed{(0, y_1^-)}$
$C_{sx'}$	$m_{x'} 11$	x_2^-, $(-ax_1^+, bx_1^+)$, $\boxed{(-by_1^-, -ay_1^-)}$
$C_{sx''}$	$m_{x''} 11$	x_1^-, $(-ax_1^+, -bx_1^+)$, $\boxed{(by_1^-, -ay_1^-)}$
C_1	1	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_1^+, y_1^+), $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$

Geometric class $No.\ G20$: Group (b) D_{3dy} - $\overline{3}_z 1 m_y$

C_{3i}	$\overline{3}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
D_{3y},	$3_z 12_y$	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{3vy},	$3_z 1 m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
C_3	3_z	x_2^+, x_1^-, x_2^-
C_{2hy}	$12_y/m_y 1$	$\boxed{(0, y_1^+)}$
$C_{2hy'}$	$12_{y'}/m_{y'} 1$	$\boxed{(-by_1^+, -ay_1^+)}$
$C_{2hy''}$	$12_{y''}/m_{y''} 1$	$\boxed{(by_1^+, -ay_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	x_2^+, $\boxed{(x_1^+, y_1^+)}$
C_{2y}	$12_y 1$	x_1^-, $(0, y_1^+)$, $\boxed{(0, y_1^-)}$
$C_{2y'}$	$12_{y'} 1$	x_1^-, $(-by_1^+, -ay_1^+)$, $\boxed{(-by_1^-, -ay_1^-)}$
$C_{2y''}$	$12_{y''} 1$	x_1^-, $(by_1^+, -ay_1^+)$, $\boxed{(by_1^-, -ay_1^-)}$
C_{sy}	$1 m_y 1$	x_2^-, $(0, y_1^+)$, $\boxed{(x_1^-, 0)}$
$C_{sy'}$	$1 m_{y'} 1$	x_2^-, $(-by_1^+, -ay_1^+)$, $\boxed{(-ax_1^-, bx_1^-)}$
$C_{sy''}$	$1 m_{y''} 1$	x_1^-, $(by_1^+, -ay_1^+)$, $\boxed{(-ax_1^-, -bx_1^-)}$
C_1	1	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_1^+, y_1^+), $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$

Hexagonal family; hexagonal system

Geometric class $No.\ G21$: Group C_6 - 6_z
$No.\ G22$: C_{3h} - $\overline{6}_z$

$G21$		$G22$		
C_3	3_z	C_3	3_z	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
C_{2z}	112_z	C_{sz}	$11m_z$	$\boxed{(x_2, y_2)}$
C_1	1	C_1	1	x_3, (x_2, y_2), $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G23$: Group C_{6h} - $6_z/m_z$

C_{3i}	$\overline{3}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
C_6	6_z	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{3h}	$\overline{6}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
C_3	3_z	x_3^+, x_1^-, x_3^-
C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\boxed{(x_2^+, y_2^+)}$
C_i	$\overline{1}$	x_3^+, (x_2^+, y_2^+), $\boxed{(x_1^+, y_1^+)}$
C_{2z}	112_z	x_1^-, (x_2^+, y_2^+), $\boxed{(x_2^-, y_2^-)}$
C_{sz}	$11m_z$	x_3^-, (x_2^+, y_2^+), $\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$
C_1	1	x_3^+, x_1^-, x_3^-, (x_2^+, y_2^+), (x_1^+, y_1^+), (x_2^-, y_2^-), (x_1^-, y_1^-)

Geometric class $No.\ G24$: Group $D_6 - 6_z 2_x 2_y$
$No.\ G25$: $C_{6v} - 6_z m_x m_y$

$G24$		$G25$		
C_6	6_z	C_6	6_z	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
D_{3x}	$3_z 2_x 1$	C_{3vx}	$3_z m_x 1$	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
D_{3y}	$3_z 12_y$	$C_{3vy},$	$3_z 1 m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_4}$
C_3	3_z	C_3	3_z	$\mathsf{x}_2,\ \mathsf{x}_3,\ \mathsf{x}_4$
D_2	$2_x 2_y 2_z$	C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	$\boxed{(x_2, 0)}$
$D_{2'}$	$2_{x'} 2_{y'} 2_z$	$C_{2vz'}$	$m_{x'} m_{y'} 2_z$	$\boxed{(-ax_2, bx_2)}$
$D_{2''}$	$2_{x''} 2_{y''} 2_z$	$C_{2vz''}$	$m_{x''} m_{y''} 2_z$	$\boxed{(-ax_2, -bx_2)}$
C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	$\mathsf{x}_2,\ \boxed{(x_2, y_2)}$
C_{2x}	$2_x 11$	C_{sx}	$m_x 11$	$\mathsf{x}_3,\ (x_2, 0),\ \boxed{(x_1, 0)}$
$C_{2x'}$	$2_{x'} 11$	$C_{sx'}$	$m_{x'} 11$	$\mathsf{x}_3,\ (-ax_2, bx_2),\ \boxed{(-ax_1, bx_1)}$
$C_{2x''}$	$2_{x''} 11$	$C_{sx''}$	$m_{x''} 11$	$\mathsf{x}_3,\ (-ax_2, -bx_2),\ \boxed{(-ax_1, -bx_1)}$
C_{2y}	$12_y 1$	C_{sy}	$1 m_y 1$	$\mathsf{x}_4,\ (x_2, 0),\ \boxed{(0, y_1)}$
$C_{2y'}$	$12_{y'} 1$	$C_{sy'}$	$1 m_{y'} 1$	$\mathsf{x}_4,\ (-ax_2, bx_2),\ \boxed{(-by_1, -ay_1)}$
$C_{2y''}$	$12_{y''} 1$	$C_{sy''}$	$1 m_{y''} 1$	$\mathsf{x}_4,\ (-ax_2, -bx_2),\ \boxed{(by_1, -ay_1)}$
C_1	1	C_1	1	$\mathsf{x}_2,\ \mathsf{x}_3,\ \mathsf{x}_4,\ (x_2, y_2),\ \boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G26$: Group (a) $D_{3h} - \overline{6}_z 2_x m_y$
(b) $\widehat{D}_{3h} - \overline{6}_z m_x 2_y$

$G26a$		$G26b$		
C_{3h}	$\overline{6}_z$	C_{3h}	$\overline{6}_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
D_{3x}	$3_z 2_x 1$	C_{3vx}	$3_z m_x 1$	$\boxed{\mathsf{x}_3}$
C_{3vy},	$3_z 1 m_y$	D_{3y},	$3_z 12_y$	$\boxed{\mathsf{x}_4}$
C_3	3_z	C_3	3_z	x_2, x_3, x_4
C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	$\boxed{(x_2, 0)}$
$C_{2vx'}$	$2_{x'} m_{y'} m_z$	$C_{2vy'}$	$m_{x'} 2_{y'} m_z$	$\boxed{(-ax_2, bx_2)}$
$C_{2vx''}$	$2_{x''} m_{y''} m_z$	$C_{2vy''}$	$m_{x''} 2_{y''} m_z$	$\boxed{(-ax_2, -bx_2)}$
C_{sz}	$11 m_z$	C_{sz}	$11 m_z$	x_2, $\boxed{(x_2, y_2)}$
C_{2x}	$2_x 11$	C_{sx}	$m_x 11$	x_3, $(x_2, 0)$, $\boxed{(x_1, 0)}$
$C_{2x'}$	$2_{x'} 11$	$C_{sx'}$	$m_{x''} 11$	x_3, $(-ax_2, bx_2)$, $\boxed{(-ax_1, bx_1)}$
$C_{2x''}$	$2_{x''} 11$	$C_{sx''}$	$m_{x''} 11$	x_3, $(-ax_2, -bx_2)$, $\boxed{(-ax_1, -bx_1)}$
C_{sy}	$1 m_y 1$	C_{2y}	$12_y 1$	x_4, $(x_2, 0)$, $\boxed{(0, y_1)}$
$C_{sy'}$	$1 m_{y'} 1$	$C_{2y'}$	$12_{y'} 1$	x_4, $(-ax_2, bx_2)$, $\boxed{(-by_1, -ay_1)}$
$C_{sy''}$	$1 m_{y''} 1$	$C_{2y''}$	$12_{y''} 1$	x_4, $(-ax_2, -bx_2)$, $\boxed{(by_1, -ay_1)}$
C_1	1	C_1	1	x_2, x_3, x_4, (x_2, y_2), $\boxed{(x_1, y_1)}$

Geometric class $No.\ G27$: Group $D_{6h} - 6_z/m_z m_x m_y$

C_{6h},	$6_z/m_z$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
D_{3dx},	$\overline{3}_z m_x 1$	$\boxed{\mathsf{x}_3^+}$
D_{3dy},	$\overline{3}_z 1 m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_4^+}$
D_6,	$6_z 2_x 2_y$	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
C_{6v},	$6_z m_x m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
D_{3h},	$\overline{6}_z 2_x m_y$	$\boxed{\mathsf{x}_3^-}$
$\widehat{D}_{3h}$,	$\overline{6}_z m_x 2_y$	$\boxed{\mathsf{x}_4^-}$
C_{3i},	$\overline{3}_z$	$\mathsf{x}_2^+, \mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_4^+$
C_6,	6_z	$\mathsf{x}_2^+, \mathsf{x}_1^-, \mathsf{x}_2^-$
D_{3x},	$3_z 2_x 1$	$\mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_1^-, \mathsf{x}_3^-$
D_{3y},	$3_z 12_y$	$\mathsf{x}_4^+, \mathsf{x}_1^-, \mathsf{x}_4^-$
C_{3h},	$\overline{6}_z$	$\mathsf{x}_2^+, \mathsf{x}_3^-, \mathsf{x}_4^-$
C_{3vx},	$3_z m_x 1$	$\mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_2^-, \mathsf{x}_4^-$
C_{3vy},	$3_z 1 m_y$	$\mathsf{x}_4^+, \mathsf{x}_2^-, \mathsf{x}_3^-$
C_3,	3_z	$\mathsf{x}_2^+, \mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_4^+, \mathsf{x}_1^-, \mathsf{x}_2^-, \mathsf{x}_3^-, \mathsf{x}_4^-$
D_{2h}	$m_x m_y m_z$	$\boxed{(x_2^+, 0)}$
$D_{2h'}$	$m_{x'} m_{y'} m_z$	$\boxed{(-a x_2^+, b x_2^+)}$
$D_{2h''}$	$m_{x''} m_{y''} m_z$	$\boxed{(-a x_2^+, -b x_2^+)}$
C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\mathsf{x}_2, \boxed{(x_2^+, y_2^+)}$
C_{2hx}	$2_x/m_x 11$	$\mathsf{x}_3^+, (x_2^+, 0), \quad \boxed{(x_1^+, 0)}$
$C_{2hx'}$	$2_{x'}/m_{x'} 11$	$\mathsf{x}_3^+, (-a x_2^+, b x_2^+), \quad \boxed{(-a x_1^+, b x_1^+)}$
$C_{2hx''}$	$2_{x''}/m_{x''} 1$	$\mathsf{x}_3^+, (-a x_2^+, -b x_2^+), \quad \boxed{(-a x_1^+, -b x_1^+)}$
C_{2hy}	$12_y/m_y 1$	$\mathsf{x}_4^+, (x_2^+, 0), \quad \boxed{(0, y_1^+)}$
$C_{2hy'}$	$12_{y'}/m_{y'} 1$	$\mathsf{x}_4^+, (-a x_2^+, b x_2^+), \quad \boxed{(-b y_1^+, -a y_1^+)}$
$C_{2hy''}$	$12_{y''}/m_{y''} 1$	$\mathsf{x}_4^+, (-a x_2^+, -b x_2^+), \quad \boxed{(b y_1^+, -a y_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	$\mathsf{x}_2^+, \mathsf{x}_3^+, \mathsf{x}_4^+; (x_2^+, y_2^+), \boxed{(x_1^+, y_1^+)}$

D_2	$2_x 2_y 2_z$	$\mathsf{x}_1^-,\ (x_2^+, 0),$	$\boxed{(x_2^-, 0)}$
$D_{2'}$	$2_{x'} 2_{y'} 2_z$	$\mathsf{x}_1^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$\boxed{(-ax_2^-, bx_2^-)}$
$D_{2''}$	$2_{x''} 2_{y''} 2_z$	$\mathsf{x}_1^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$\boxed{(-ax_2^-, -bx_2^-)}$
C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	$\mathsf{x}_2^-,\ (x_2^+, 0),$	$\boxed{(0, y_2^-)}$
$C_{2vz'}$	$m_{x'} m_{y'} 2_z$	$\mathsf{x}_2^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$\boxed{(-by_2^-, -ay_2^-)}$
$C_{2vz''}$	$m_{x''} m_{y''} 2_z$	$\mathsf{x}_2^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$\boxed{(by_2^-, -ay_2^-)}$
C_{2z}	112_z	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_2^-;\ (x_2^+, y_2^+),$	$\boxed{(x_2^-, y_2^-)}$
C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	$\mathsf{x}_3^+,\ (x_2^+, 0),$	$\boxed{(x_1^-, 0)}$
$C_{2vx'}$	$2_{x'} m_{y'} m_z$	$\mathsf{x}_3^+,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$\boxed{(-ax_1^-, bx_1^-)}$
$C_{2vx''}$	$2_{x''} m_{y''} m_z$	$\mathsf{x}_3^+,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$\boxed{(-ax_1^-, -bx_1^-)}$
C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	$\mathsf{x}_4^+,\ (x_2^+, 0),$	$\boxed{(0, y_1^-)}$
$C_{2vy'}$	$m_{x'} 2_{y'} m_z$	$\mathsf{x}_4^+,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$\boxed{(-by_1^-, -ay_1^-)}$
$C_{2vy''}$	$m_{x''} 2_{y''} m_z$	$\mathsf{x}_4^+,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$\boxed{(by_1^-, -ay_1^-)}$
C_{sz}	$11m_z$	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_3^-,\ \mathsf{x}_4^-;\ (x_2^+, y_2^+),$	$\boxed{(x_1^-, y_1^-)}$

C_{2x}	$2_x 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (x_2^+, 0),$	$(x_1^+, 0),$	$(x_2^-, 0),$	$(x_1^-, 0)$
$C_{2x'}$	$2_{x'} 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$(-ax_1^+, bx_1^+),$	$(-ax_2^-, bx_2^-),$	$(-ax_1^-, bx_1^-)$
$C_{2x''}$	$2_{x''} 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$(-ax_1^+, -bx_1^+),$	$(-ax_2^-, -bx_2^-),$	$(-ax_1^-, -bx_1^-)$
C_{2y}	$12_y 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (x_2^+, 0),$	$(0, y_1^+),$	$(x_2^-, 0),$	$(0, y_1^-)$
$C_{2y'}$	$12_{y'} 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$(-by_1^+, -ay_1^+),$	$(-ax_2^-, bx_2^-),$	$(-by_1^-, -ay_1^-)$
$C_{2y''}$	$12_{y''} 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$(by_1^+, -ay_1^+),$	$(-ax_2^-, -bx_2^-),$	$(by_1^-, -ay_1^-)$
C_{sx}	$m_x 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (x_2^+, 0),$	$(x_1^+, 0),$	$(0, y_2^-),$	$(0, y_1^-)$
$C_{sx'}$	$m_{x'} 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$(-ax_1^+, bx_1^+),$	$(-by_2^-, -ay_2^-),$	$(-by_1^-, -ay_1^-)$
$C_{sx''}$	$m_{x''} 11$	$\mathsf{x}_3^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_4^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$(-ax_1^+, -bx_1^+),$	$(by_2^-, -ay_2^-),$	$(by_1^-, -ay_1^-)$
C_{sy}	$1m_y 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (x_2^+, 0),$	$(0, y_1^+),$	$(0, y_2^-),$	$(x_1^-, 0)$
$C_{sy'}$	$1m_{y'} 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (-ax_2^+, bx_2^+),$	$(-by_1^+, -ay_1^+),$	$(-by_2^-, -ay_2^-),$	$(-ax_1^-, bx_1^-)$
$C_{sy''}$	$1m_{y''} 1$	$\mathsf{x}_4^+,\ \mathsf{x}_2^-,\ \mathsf{x}_3^-,\ (-ax_2^+, -bx_2^+),$	$(by_1^+, -ay_1^+),$	$(by_2^-, -ay_2^-),$	$(-ax_1^-, -bx_1^-)$
C_1	1	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_2^-;\ (x_2^+, y_2^+),\ (x_1^-, y_1^-)$			

Cubic system

Geometric class $No.\ G28$: Group $T-23$

D_2	$2_x2_y2_z$	$\boxed{(x_3,y_3)}$
C_{2z}	112_z	$(x_3,y_3),\ \boxed{(0,0,z_1)}$
C_{2x}	2_x11	$(x_3,y_3),\ \boxed{(z_1,0,0)}$
C_{2y}	12_y1	$(x_3,y_3),\ \boxed{(0,z_1,0)}$
C_{3p}	3_p	$\boxed{(x_1,x_1,x_1)}$
C_{3q}	3_q	$\boxed{(-x_1,-x_1,x_1)}$
C_{3r}	3_r	$\boxed{(x_1,-x_1,-x_1)}$
C_{3s}	3_s	$\boxed{(-x_1,x_1,-x_1)}$
C_1	1	$(x_3,y_3),\ \boxed{(x_1,y_1,z_1)}$

Geometric class $No.\ G29$: Group $T_h - m\overline{3}$

T	23	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
D_{2h}	$m_x m_y m_z$	$\boxed{(x_3^+, y_3^+)}$
D_2	$2_x 2_y 2_z$	$\mathsf{x}_1^-\ (x_3^+, y_3^+), \boxed{(x_3^-, y_3^-)}$
C_{2hz}	$112_z/m_z$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(0, 0, z_1^+)}$
C_{2hx}	$2_x/m_x 11$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(z_1^+, 0, 0)}$
C_{2hy}	$12_y/m_y 1$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(0, z_1^+, 0)}$
C_{3ip}	$\overline{3}_p$	$\boxed{(x_1^+, x_1^+, x_1^+)}$
C_{3iq}	$\overline{3}_q$	$\boxed{(-x_1^+, -x_1^+, x_1^+)}$
C_{3ir}	$\overline{3}_r$	$\boxed{(x_1^+, -x_1^+, -x_1^+)}$
C_{3is}	$\overline{3}_s$	$\boxed{(-x_1^+, x_1^+, -x_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(x_1^+, y_1^+, z_1^+)}$
C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(0, 0, z_1^-)}$
C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(z_1^-, 0, 0)}$
C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	$(x_3^+, y_3^+), \boxed{(0, z_1^-, 0)}$
C_{2z}	112_z	$\mathsf{x}_1^-, (x_3^+, y_3^+), (x_3^-, y_3^-), (0, 0, z_1^+), (0, 0, z_1^-)$
C_{2x}	$2_x 11$	$\mathsf{x}_1^-, (x_3^+, y_3^+), (x_3^-, y_3^-), (z_1^+, 0, 0), (z_1^-, 0, 0)$
C_{2y}	$12_y 1$	$\mathsf{x}_1^-, (x_3^+, y_3^+), (x_3^-, y_3^-), (0, z_1^+, 0), (0, z_1^-, 0)$
C_{sz}	$11m_z$	$(x_3^+, y_3^+), (0, 0, z_1^+), \boxed{(x_1^-, y_1^-, 0)}$
C_{sx}	$m_x 11$	$(x_3^+, y_3^+), (z_1^+, 0, 0), \boxed{(0, x_1^-, y_1^-)}$
C_{sy}	$1m_y 1$	$(x_3^+, y_3^+), (0, z_1^+, 0), \boxed{(y_1^-, 0, x_1^-)}$
C_{3p}	3_p	$\mathsf{x}_1^-, (x_1^+, x_1^+, x_1^+), \boxed{(x_1^-, x_1^-, x_1^-)}$
C_{3q}	3_q	$\mathsf{x}_1^-, (-x_1^+, -x_1^+, x_1^+), \boxed{(-x_1^-, -x_1^-, x_1^-)}$
C_{3r}	3_r	$\mathsf{x}_1^-, (x_1^+, -x_1^+, -x_1^+), \boxed{(x_1^-, -x_1^-, -x_1^-)}$
C_{3s}	3_s	$\mathsf{x}_1^-, (-x_1^+, x_1^+, -x_1^+), \boxed{(-x_1^-, x_1^-, -x_1^-)}$
C_1	1	$\mathsf{x}_1^-, (x_3^+, y_3^+), (x_3^-, y_3^-), (x_1^+, y_1^+, z_1^+), \boxed{(x_1^-, y_1^-, z_1^-)}$

Geometric class $No.\ G30$: Group $O-432$
$No.\ G31$: $T_d-\overline{4}3m$

$G30$		$G31$		
T	23	T	23	$\boxed{\mathsf{x}_2}$
D_{4z}	$4_z2_x2_{xy}$	D_{2dz}	$\overline{4}_z2_xm_{xy}$	$\boxed{(x_3,0)}$
D_{4x}	$4_x2_y2_{yz}$	D_{2dx}	$\overline{4}_x2_ym_{yz}$	$\boxed{(-ax_3,bx_3)}$
D_{4y}	$4_y2_z2_{zx}$	D_{2dy}	$\overline{4}_y2_zm_{zx}$	$\boxed{(-ax_3,-bx_3)}$
D_2	$2_x2_y2_z$	D_2	$2_x2_y2_z$	x_2, $\boxed{(x_3,y_3)}$
C_{4z}	4_z	S_{4z}	$\overline{4}_z$	$(x_3,0)$, $\boxed{(0,0,z_1)}$
C_{4x}	4_x	S_{4x}	$\overline{4}_x$	$(-ax_3,bx_3)$, $\boxed{(z_1,0,0)}$
C_{4y}	4_y	S_{4y}	$\overline{4}_y$	$(-ax_3,-bx_3)$, $\boxed{(0,z_1,0)}$
$\widehat{D}_{2z}$	$2_{x\overline{y}}2_{xy}2_z$	$\widehat{C}_{2vz}$	$m_{x\overline{y}}m_{xy}2_z$	$(x_3,0)$, $\boxed{(0,0,z_2)}$
$\widehat{D}_{2x}$	$2_{y\overline{z}}2_{yz}2_x$	$\widehat{C}_{2vx}$	$m_{y\overline{z}}m_{yz}2_x$	$(-ax_3,bx_3)$, $\boxed{(z_2,0,0)}$
$\widehat{D}_{2y}$	$2_{z\overline{x}}2_{zx}2_y$	$\widehat{C}_{2vy}$	$m_{z\overline{x}}m_{zx}2_y$	$(-ax_3,-bx_3)$, $\boxed{(0,z_2,0)}$
C_{2z}	112_z	C_{2z}	112_z	x_2, (x_3,y_3), $(0,0,z_1)$, $(0,0,z_2)$
C_{2x}	2_x11	C_{2x}	2_x11	x_2, (x_3,y_3), $(z_1,0,0)$, $(z_2,0,0)$
C_{2y}	12_y1	C_{2y}	12_y1	x_2, (x_3,y_3), $(0,z_1,0)$, $(0,z_2,0)$
C_{2xy}	$12_{xy}1$	C_{sxy}	$1m_{xy}1$	$(x_3,0)$, $\boxed{(x_1,x_1,0),}$ $\boxed{(x_2,-x_2,z_2)}$
$C_{2x\overline{y}}$	$2_{x\overline{y}}11$	$C_{sx\overline{y}}$	$m_{x\overline{y}}11$	$(x_3,0)$, $\boxed{(x_1,-x_1,0),}$ $\boxed{(x_2,x_2,z_2)}$
C_{2yz}	$12_{yz}1$	C_{syz}	$1m_{yz}1$	$(-ax_3,bx_3)$, $\boxed{(0,x_1,x_1),}$ $\boxed{(z_2,x_2,-x_2)}$
$C_{2y\overline{z}}$	$2_{y\overline{z}}11$	$C_{sy\overline{z}}$	$m_{y\overline{z}}11$	$(-ax_3,bx_3)$, $\boxed{(0,x_1,-x_1),}$ $\boxed{(z_2,x_2,x_2)}$
C_{2zx}	$12_{zx}1$	C_{szx}	$1m_{zx}1$	$(-ax_3,-bx_3)$, $\boxed{(x_1,0,x_1),}$ $\boxed{(-x_2,z_2,x_2)}$
$C_{2z\overline{x}}$	$2_{z\overline{x}}11$	$C_{sz\overline{x}}$	$m_{z\overline{x}}11$	$(-ax_3,-bx_3)$, $\boxed{(-x_1,0,x_1),}$ $\boxed{(x_2,z_2,x_2,)}$
D_{3p}	$3_p2_{x\overline{y}}$	C_{3vp}	$3_pm_{x\overline{y}}$	$\boxed{(x_2,x_2,x_2)}$
D_{3q}	$3_q2_{x\overline{y}}$	C_{3vq}	$3_qm_{x\overline{y}}$	$\boxed{(-x_2,-x_2,x_2)}$
D_{3r}	3_r2_{xy}	C_{3vr}	3_rm_{xy}	$\boxed{(x_2,-x_2,-x_2)}$
D_{3s}	3_s2_{xy}	C_{3vs}	3_sm_{xy}	$\boxed{(-x_2,x_2,-x_2)}$
C_{3p}	3_p	C_{3p}	3_p	x_2, (x_2,x_2,x_2), $\boxed{(x_1,x_1,x_1)}$
C_{3q}	3_q	C_{3q}	3_q	x_2, $(-x_2,-x_2,x_2)$, $\boxed{(-x_1,-x_1,x_1)}$
C_{3r}	3_r	C_{3r}	3_r	x_2, $(x_2,-x_2,-x_2)$, $\boxed{(x_1,-x_1,-x_1)}$
C_{3s}	3_s	C_{3s}	3_s	x_2, $(-x_2,x_2,-x_2)$, $\boxed{(-x_1,x_1,-x_1)}$
C_1	1	C_1	1	x_2, (x_3,y_3), $\boxed{(x_2,y_2,z_2),}$ $\boxed{(x_1,y_1,z_1)}$

Geometric class $No.\ G32$: Group $O_h - m\overline{3}m$

T_h	$m\overline{3}$	$\boxed{\mathsf{x}_2^+}$
O	432	$\boxed{\mathsf{x}_1^-}$
T_d	$\overline{4}3m$	$\boxed{\mathsf{x}_2^-}$
T	23	$\mathsf{x}_2^+,\ \mathsf{x}_1^-,\ \mathsf{x}_2^-$
D_{4hz}	$4_z/m_z m_x m_{xy}$	$\boxed{(x_3^+,0)}$
D_{4hx}	$4_x/m_x m_y m_{yz}$	$\boxed{(-ax_3^+,bx_3^+)}$
D_{4hy}	$4_y/m_y m_z m_{zx}$	$\boxed{(-ax_3^+,-bx_3^+)}$
D_{2h}	$m_x m_y m_z$	$\mathsf{x}_2^+,\ \boxed{(x_3^+,y_3^+)}$
C_{4hz}	$4_z/m_z$	$(x_3^+,0),\ \boxed{(0,0,z_1^+)}$
C_{4hx}	$4_x/m_x$	$(-ax_3^+,bx_3^+),\ \boxed{(z_1^+,0,0)}$
C_{4hy}	$4_y/m_y$	$(-ax_3^+,-bx_3^+),\ \boxed{(0,z_1^+,0)}$
$\widehat{D}_{2hz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} m_z$	$(x_3^+,0),\ \boxed{(0,0,z_2^+)}$
$\widehat{D}_{2hx}$	$m_{y\overline{z}} m_{yz} m_x$	$(-ax_3^+,bx_3^+),\ \boxed{(z_2^+,0,0)}$
$\widehat{D}_{2hy}$	$m_{z\overline{x}} m_{zx} m_y$	$(-ax_3^+,-bx_3^+),\ \boxed{(0,z_2^+,0)}$
C_{2hz}	$112_z/m_z$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_3^+,y_3^+),\ (0,0,z_1^+),\ (0,0,z_2^+)$
C_{2hx}	$2_x/m_x 11$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_3^+,y_3^+),\ (z_1^+,0,0),\ (z_2^+,0,0)$
C_{2hy}	$12_y/m_y 1$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_3^+,y_3^+),\ (0,z_1^+,0),\ (0,z_2^+,0)$
C_{2hxy}	$12_{xy}/m_{xy}1$	$(x_3^+,0),\ \boxed{(x_1^+,x_1^+,0)},\ \boxed{(x_2^+,-x_2^+,z_2^+)}$
$C_{2hx\overline{y}}$	$2_{x\overline{y}}/m_{x\overline{y}}11$	$(x_3^+,0),\ \boxed{(x_1^+,-x_1^+,0)},\ \boxed{(x_2^+,x_2^+,z_2^+)}$
C_{2hyz}	$12_{yz}/m_{yz}1$	$(-ax_3^+,bx_3^+),\ \boxed{(0,x_1^+,x_1^+)},\ \boxed{(z_2^+,x_2^+,-x_2^+)}$
$C_{2hy\overline{z}}$	$2_{y\overline{z}}/m_{y\overline{z}}11$	$(-ax_3^+,bx_3^+),\ \boxed{(0,x_1^+,-x_1^+)},\ \boxed{(z_2^+,x_2^+,x_2^+)}$
C_{2hzx}	$12_{zx}/m_{zx}1$	$(-ax_3^+,-bx_3^+),\ \boxed{(x_1^+,0,x_1^+)},\ \boxed{(-x_2^+,z_2^+,x_2^+)}$
$C_{2hz\overline{x}}$	$2_{z\overline{x}}/m_{z\overline{x}}11$	$(-ax_3^+,-bx_3^+),\ \boxed{(-x_1^+,0,x_1^+)},\ \boxed{(x_2^+,z_2^+,x_2^+)}$
D_{3dp}	$\overline{3}_p m_{x\overline{y}}$	$\boxed{(x_2^+,x_2^+,x_2^+)}$
D_{3dq}	$\overline{3}_q m_{x\overline{y}}$	$\boxed{(-x_2^+,-x_2^+,x_2^+)}$
D_{3dr}	$\overline{3}_r m_{xy}$	$\boxed{(x_2^+,-x_2^+,-x_2^+)}$
D_{3ds}	$\overline{3}_s m_{xy}$	$\boxed{(-x_2^+,x_2^+,-x_2^+)}$
C_{3ip}	$\overline{3}_p$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_2^+,x_2^+,x_2^+),\ \boxed{(x_1^+,x_1^+,x_1^+)}$
C_{3iq}	$\overline{3}_q$	$\mathsf{x}_2^+,\ (-x_2^+,-x_2^+,x_2^+),\ \boxed{(-x_1^+,-x_1^+,x_1^+)}$
C_{3ir}	$\overline{3}_r$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_2^+,-x_2^+,-x_2^+),\ \boxed{(x_1^+,-x_1^+,-x_1^+)}$
C_{3is}	$\overline{3}_s$	$\mathsf{x}_2^+,\ (-x_2^+,x_2^+,-x_2^+),\ \boxed{(-x_1^+,x_1^+,-x_1^+)}$
C_i	$\overline{1}$	$\mathsf{x}_2^+,\ (x_3^+,y_3^+),\ \boxed{(x_2^+,y_2^+,z_2^+)},\ \boxed{(x_1^+,y_1^+,z_1^+)}$

Geometric class $No.\ G32$: Group $O_h - m\overline{3}m$ cont.1

D_{4z}	$4_z 2_x 2_{xy}$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(x_3^-,0)$		
D_{4x}	$4_x 2_y 2_{yz}$	x_1^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,bx_3^-)$		
D_{4y}	$4_y 2_z 2_{zx}$	x_1^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,-bx_3^-)$		
D_{2dz}	$\overline{4}_z 2_x m_{xy}$	x_2^-, $(x_3^+,0)$,	$(0,y_3^-)$		
D_{2dx}	$\overline{4}_x 2_y m_{yz}$	x_2^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-by_3^-,-ay_3^-)$		
D_{2dy}	$\overline{4}_y 2_z m_{zx}$	x_2^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(by_3^-,-ay_3^-)$		
D_2	$2_x 2_y 2_z$	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_3^+,y_3^+),	(x_3^-,y_3^-)		
C_{4vz}	$4_z m_x m_{xy}$	$(x_3^+,0)$,	$(0,0,z_1^-)$		
C_{4vx}	$4_x m_y m_{yz}$	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_1^-,0,0)$		
C_{4vy}	$4_y m_z m_{zx}$	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_1^-,0)$		
$\widehat{D}_{2dz}$	$\overline{4}_z m_x 2_{xy}$	$(x_3^+,0)$,	$(0,0,z_2^-)$		
$\widehat{D}_{2dx}$	$\overline{4}_x m_y 2_{yz}$	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_2^-,0,0)$		
$\widehat{D}_{2dy}$	$\overline{4}_y m_z 2_{zx}$	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_2^-,0)$		
C_{4z}	4_z	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(x_3^-,0)$,	$(0,0,z_1^+)$,	$(0,0,z_1^-)$
C_{4x}	4_x	x_1^-, $(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_1^+,0,0)$,	$(z_1^-,0,0)$
C_{4y}	4_y	x_1^-, $(-ax_3^-,-bx_3^-)$,	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_1^+,0)$,	$(0,z_1^-,0)$
$\widehat{D}_{2z}$	$2_{x\overline{y}} 2_{xy} 2_z$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(x_3^-,0)$,	$(0,0,z_2^+)$,	$(0,0,z_2^-)$
$\widehat{D}_{2x}$	$2_{y\overline{z}} 2_{yz} 2_x$	x_1^-, $(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_2^+,0,0)$,	$(z_2^-,0,0)$
$\widehat{D}_{2y}$	$2_{z\overline{x}} 2_{zx} 2_y$	x_1^-, $(-ax_3^-,-bx_3^-)$,	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_2^+,0)$,	$(0,z_2^-,0)$
S_{4z}	$\overline{4}_z$	x_2^-, $(x_3^+,0)$,	$(0,y_3^-)$,	$(0,0,z_1^+)$,	$(0,0,z_2^-)$
S_{4x}	$\overline{4}_x$	x_2^-, $(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(-by_3^-,-ay_3^-)$,	$(z_1^+,0,0)$,	$(z_2^-,0,0)$
S_{4y}	$\overline{4}_y$	x_2^-, $(-ax_3^-,-bx_3^-)$,	$(by_3^-,-ay_3^-)$,	$(0,z_1^+,0)$,	$(0,z_2^-,0)$
$\widehat{C}_{2vz}$	$m_{x\overline{y}} m_{xy} 2_z$	x_2^-, $(x_3^+,0)$,	$(0,y_3^-)$,	$(0,0,z_2^+)$,	$(0,0,z_1^-)$
$\widehat{C}_{2vx}$	$m_{y\overline{z}} m_{yz} 2_x$	x_2^-, $(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(-by_3^-,-ay_3^-)$,	$(z_2^+,0,0)$,	$(z_1^-,0,0)$
$\widehat{C}_{2vy}$	$m_{z\overline{x}} m_{zx} 2_y$	x_2^-, $(-ax_3^-,-bx_3^-)$,	$(by_3^-,-ay_3^-)$,	$(0,z_2^+,0)$,	$(0,z_1^-,0)$
C_{2vz}	$m_x m_y 2_z$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+),	$(0,0,z_1^-)$,	$(0,0,z_2^-)$	
C_{2vx}	$2_x m_y m_z$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+),	$(z_1^-,0,0)$,	$(z_2^-,0,0)$	
C_{2vy}	$m_x 2_y m_z$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+),	$(0,z_1^-,0)$,	$(0,z_2^-,0)$	
C_{2z}	112_z	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_3^+,y_3^+),	(x_3^-,y_3^-),	$(0,0,z_1^+)$,	$(0,0,z_2^+)$, $(0,0,z_1^-)$, $(0,0,z_2^-)$
C_{2x}	$2_x 11$	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_3^+,y_3^+),	(x_3^-,y_3^-),	$(z_1^+,0,0)$,	$(z_2^+,0,0)$, $(z_1^-,0,0)$, $(z_2^-,0,0)$
C_{2y}	$12_y 1$	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_3^+,y_3^+),	(x_3^-,y_3^-),	$(0,z_1^+,0)$,	$(0,z_2^+,0)$, $(0,z_1^-,0)$, $(0,z_2^-,0)$
C_{sz}	$11m_z$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+), $(0,0,z_1^+)$, $(0,0,z_2^+)$,	$(x_1^-,y_1^-,0)$,	$(x_2^-,y_2^-,0)$	
C_{sx}	$m_x 11$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+), $(z_1^+,0,0)$, $(z_2^+,0,0)$,	$(0,x_1^-,y_1^-)$,	$(0,x_2^-,y_2^-)$	
C_{sy}	$1m_y 1$	x_2^+, (x_3^+,y_3^+), $(0,z_1^+,0)$, $(0,z_2^+,0)$,	$(y_1^-,0,x_1^-)$,	$(y_2^-,0,x_2^-)$	

Geometric class $No.\ G32$: Group $O_h - m\bar{3}m$ cont.2/end

$\widehat{C}_{2vxy}$	$m_{x\bar{y}}2_{xy}m_z$	$(x_3^+,0)$,	$(0,0,z_2^+)$,	$(x_1^-,x_1^-,0)$,	$(x_2^-,-x_2^-,0)$
$\widehat{C}_{2vx\bar{y}}$	$2_{x\bar{y}}m_{xy}m_z$	$(x_3^+,0)$,	$(0,0,z_2^+)$,	$(x_1^-,-x_1^-,0)$,	$(x_2^-,x_2^-,0)$
$\widehat{C}_{2vyz}$	$m_{y\bar{z}}2_{yz}m_x$	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_2^+,0,0)$,	$(0,x_1^-,x_1^-)$,	$(0,x_2^-,-x_2^-)$
$\widehat{C}_{2vy\bar{z}}$	$2_{y\bar{z}}m_{yz}m_x$	$(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(z_2^+,0,0)$,	$(0,x_1^-,-x_1^-)$,	$(0,x_2^-,x_2^-)$
$\widehat{C}_{2vzx}$	$m_{z\bar{x}}2_{zx}m_y$	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_2^+,0)$,	$(x_1^-,0,x_1^-)$,	$(-x_2^-,0,x_2^-)$
$\widehat{C}_{2vz\bar{x}}$	$2_{z\bar{x}}m_{zx}m_y$	$(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(0,z_2^+,0)$,	$(x_1^-,0,x_1^-)$,	$(-x_2^-,0,x_2^-)$

C_{2xy}	$12_{xy}1$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(x_3^-,0)$,	$(x_1^+,x_1^+,0)$,	$(x_2^+,-x_2^+,z_2^+)$,	$(x_1^-,x_1^-,0)$,	$(x_2^-,-x_2^-,z_2^-)$
$C_{2x\bar{y}}$	$2_{x\bar{y}}11$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(x_3^-,0)$,	$(x_1^+,-x_1^+,0)$,	(x_2^+,x_2^+,z_2^+),	$(x_1^-,-x_1^-,0)$,	(x_2^-,x_2^-,z_2^-)
C_{2yz}	$12_{yz}1$	x_1^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(0,x_1^+,x_1^+)$,	$(z_2^+,x_2^+,-x_2^+)$,	$(0,x_1^-,x_1^-)$,	$(z_2^-,x_2^-,-x_2^-)$
$C_{2y\bar{z}}$	$2_{y\bar{z}}11$	x_1^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,bx_3^-)$,	$(0,x_1^+,-x_1^+)$,	(z_2^+,x_2^+,x_2^+),	$(0,x_1^-,-x_1^-)$,	(z_2^-,x_2^-,x_2^-)
C_{2zx}	$12_{zx}1$	x_1^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,-b)$,	$(x_1^+,0,x_1^+)$,	$(-x_2^+,z_2^+,x_2^+)$,	$(x_1^-,0,x_1^-)$,	$(-x_2^-,z_2^-,x_2^-)$
$C_{2z\bar{x}}$	$2_{z\bar{x}}11$	x_1^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(-ax_3^-,-bx_3^-)$,	$(-x_1^+,0,x_1^+)$,	(x_2^+,z_2^+,x_2^+),	$(-x_1^-,0,x_1^-)$,	(x_2^-,z_2^-,x_2^-)

C_{sxy}	$1m_{xy}1$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(0,y_3^-)$,	$(x_1^+,x_1^+,0)$,	$(x_2^+,-x_2^+,z_2^+)$,	$(x_1^-,-x_1^-,z_1^-)$,	$(x_2^-,x_2^-,0)$
$C_{sx\bar{y}}$	$m_{x\bar{y}}11$	x_1^-, $(x_3^+,0)$,	$(0,y_3^-)$,	$(x_1^+,-x_1^+,0)$,	(x_2^+,x_2^+,z_2^+),	(x_1^-,x_1^-,z_1^-),	$(x_2^-,-x_2^-,0)$
C_{syz}	$1m_{yz}1$	x_1^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-by_3^-,-ay_3^-)$,	$(0,x_1^+,x_1^+)$,	$(z_2^+,x_2^+,-x_2^+)$,	$(z_1^-,x_1^-,-x_1^-)$,	$(0,x_2^-,x_2^-)$
$C_{sy\bar{z}}$	$m_{y\bar{z}}11$	x_1^-, $(-ax_3^+,bx_3^+)$,	$(-by_3^-,-ay_3^-)$,	$(0,x_1^+,-x_1^+)$,	(z_2^+,x_2^+,x_2^+),	(z_1^-,x_1^-,x_1^-),	$(0,x_2^-,-x_2^-)$
C_{szx}	$1m_{zx}1$	x_1^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(by_3^-,-ay_3^-)$,	$(x_1^+,0,x_1^+)$,	$(-x_2^+,z_2^+,x_2^+)$,	$(-x_1^-,z_1^-,x_1^-)$,	$(x_2^-,0,x_2^-)$
$C_{sz\bar{x}}$	$m_{z\bar{x}}11$	x_1^-, $(-ax_3^+,-bx_3^+)$,	$(by_3^-,-ay_3^-)$,	$(-x_1^+,0,x_1^+)$,	(x_2^+,z_2^+,x_2^+),	(x_1^-,z_1^-,x_1^-),	$(-x_2^-,0,x_2^-)$

D_{3p}	$3_p2_{x\bar{y}}$	x_1^-, (x_2^+,x_2^+,x_2^+),	(x_2^-,x_2^-,x_2^-)
D_{3q}	$3_q2_{x\bar{y}}$	x_1^-, $(-x_2^+,-x_2^+,x_2^+)$,	$(-x_2^-,-x_2^-,x_2^-)$
D_{3r}	3_r2_{xy}	x_1^-, $(x_2^+,-x_2^+,-x_2^+)$,	$(x_2^-,-x_2^-,-x_2^-)$
D_{3s}	3_s2_{xy}	x_1^-, $(-x_2^+,x_2^+,-x_2^+)$,	$(-x_2^-,x_2^-,-x_2^-)$

C_{3vp}	$3_pm_{x\bar{y}}$	x_2^-, (x_2^+,x_2^+,x_2^+),	(x_1^-,x_1^-,x_1^-)
C_{3vq}	$3_qm_{x\bar{y}}$	x_2^-, $(-x_2^+,-x_2^+,x_2^+)$,	$(-x_1^-,-x_1^-,x_1^-)$
C_{3vr}	3_rm_{xy}	x_2^-, $(x_2^+,-x_2^+,-x_2^+)$,	$(x_1^-,-x_1^-,-x_1^-)$
C_{3vs}	3_sm_{xy}	x_2^-, $(-x_2^+,x_2^+,-x_2^+)$,	$(-x_1^-,x_1^-,-x_1^-)$

C_{3p}	3_p	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_2^+,x_2^+,x_2^+),	(x_1^+,x_1^+,x_1^+),	(x_2^-,x_2^-,x_2^-),	(x_1^-,x_1^-,x_1^-)
C_{3q}	3_q	x_2^+, x_1^-, x_2^-, $(-x_2^+,-x_2^+,x_2^+)$,	$(-x_1^+,-x_1^+,x_1^+)$,	$(-x_2^-,-x_2^-,x_2^-)$,	$(-x_1^-,-x_1^-,x_1^-)$
C_{3r}	3_r	x_2^+, x_1^-, x_2^-, $(x_2^+,-x_2^+,-x_2^+)$,	$(x_1^+,-x_1^+,-x_1^+)$,	$(x_2^-,-x_2^-,-x_2^-)$,	$(x_1^-,-x_1^-,-x_1^-)$
C_{3s}	3_s	x_2^+, x_1^-, x_2^-, $(-x_2^+,x_2^+,-x_2^+)$,	$(-x_1^+,x_1^+,-x_1^+)$,	$(-x_2^-,x_2^-,-x_2^-)$,	$(-x_1^-,x_1^-,-x_1^-)$

C_1	1	x_2^+, x_1^-, x_2^-, (x_3^+,y_3^+), (x_3^-,y_3^-), (x_1^+,y_1^+,z_1^+), (x_2^+,y_2^+,z_2^+),	(x_1^-,y_1^-,z_1^-),	(x_2^-,y_2^-,z_2^-)